HEINTZ, G., PINKERNELL, G., SCHACHT, F. (Hrsg.)

Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht

Festschrift für HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH

Herausgeber:

Gaby Heintz
Zentrum für schulpraktische
Lehrerausbildung Neuss

Guido Pinkernell
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Florian Schacht
Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen

Titelbild von Margitta Schlüter
(erstellt mit iOrnament von Jürgen Richter-Gebert,
http://www.science-to-touch.com/)

Der digitale Anhang zu diesem Band findet sich unter:
www.elschenbroich.eu/festschrift

ISBN 978-3-940516-20-6
ISBN 978-3-940516-24-4 (eBook)

Vossenacker Straße 9, 41464 Neuss

www.mnu.de/publikationen

1. Auflage 2016

Layout, Druck und Bindung: Appel & Klinger, 96277 Schneckenlohe
Printed in Germany

Hans-Jürgen Elschenbroich
zum 65. Geburtstag

Vorwort

Seit über zwei Jahrzehnten bereichert Hans-Jürgen Elschenbroich die didaktische und unterrichtspraktische Diskussion um den Einsatz neuer Technologien im Mathematikunterricht mit einer thematischen Vielfalt an Beiträgen. Sein 65. Geburtstag ist uns somit ein selbstverständlicher und noch mehr willkommener Anlass für eine Publikation, die verschiedenste Perspektiven auf den Einsatz neuer Medien beim Lehren und Lernen von Mathematik in einem Band versammelt. Hier finden sich Beiträge aus Forschung und Praxis, Schule und Hochschule, die in ihrer Vielfalt einen umfassenden Eindruck über derzeitige Entwicklungen den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge betreffend geben und gleichzeitig das große Wirkungsfeld von Hans-Jürgen Elschenbroich abstecken.

In dem ersten Abschnitt *‚Aus der Schule für die Schule‘* wird das Potential digitaler Werkzeuge anhand der Diskussion unterrichtsrelevanter mathematischer Gegenstände diskutiert. Hier geht es um die reflektierte Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten und die daraus resultierende Einschätzung, welche spezifischen Mehrwerte digitale Werkzeuge leisten können. Hierin spiegelt sich in besonderer Weise die zentrale didaktische Funktion des Einsatzes digitaler Werkzeuge im Unterricht, derzufolge sie ihre Legitimation vornehmlich durch den Mehrwert erlangen, der sich aus ihrem Einsatz für eine authentische und reflektierte Auseinandersetzungen mit den mathematischen Inhalten ergibt.

In dem zweiten Abschnitt *‚Fachdidaktische Beiträge‘* werden Einblicke in aktuelle Entwicklungs- und Forschungsarbeiten zum Einsatz digitaler Werkzeuge geboten. Sie machen gleichzeitig die Bandbreite von Fragestellungen deutlich, die auf das Lehren und Lernen von Mathematik mit digitalen Werkzeugen fokussieren.

Im dritten Abschnitt *‚Fachmathematische Beiträge‘* steht die intensive Auseinandersetzung mit mathematischen Gegenständen explizit im Mittelpunkt. Digitale Werkzeuge können, so zeigen es die Artikel, hier sowohl als sinnstiftende als auch als kreativ-ästhetische Hilfsmittel genutzt werden.

Die *Praxisbeiträge* im vierten Abschnitt enthalten unterrichtspraktische Vorschläge zum Einsatz digitaler Werkzeuge. Hier finden sich nicht nur Aufgabenstellungen für den Unterricht in beiden Sekundarstufen und Lösungshinweise, sondern auch methodische Tipps für den konkreten Einsatz im Unterricht sowie Screenshots für Hinweise zum Bearbeitungsweg.

Das *Literaturverzeichnis* stellt zum Abschluss noch wesentliche Publikationen von Hans-Jürgen Elschenbroich zusammen.

Seit bald drei Jahrzehnten ist Hans-Jürgen Elschenbroich einer der präsentesten Akteure unter den „Neuen Technologen" der mathematikdidaktischen Szene. Wir wünschen ihm und uns, dass das noch lange so bleibt!

Gaby Heintz *Guido Pinkenell* *Florian Schacht*

Inhaltsverzeichnis

Einführung

1 Aus der Schule, für die Schule

2 Fachdidaktische Beiträge

3 Fachmathematische Beiträge

Einführung

Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge

Gaby Heintz: Neuss
Guido Pinkernell: Heidelberg
Florian Schacht: Essen

Digitale Werkzeuge sind im Alltag nicht mehr wegzudenken und gehören somit selbstverständlich auch zu einem zeitgemäßen Mathematikunterricht. Diese Selbstverständlichkeit findet sich curricular in den Mathematiklehrplänen der Bundesländer und den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz ebenso abgebildet wie im unterrichtspraktischen Alltag an den Schulen, in dem digitale Technik immer häufiger zum Einsatz kommt. Unumstritten ist das, was wir eine Selbstverständlichkeit nennen, aber nicht. Die gegenwärtigen Diskussionen etwa um die Zulässigkeit digitaler Werkzeuge in (zentralen) Prüfungen zeigen, dass ihr Einsatz im Mathematikunterricht kein Selbstzweck ist: Ihr Einsatz mag die Motivation der Schülerinnen und Schüler kurzfristig erhöhen, aber er führt nicht automatisch zu besseren Lernerfolgen. Inwiefern digitale Werkzeuge neben einem *zeitgemäßen auch einen guten Mathematikunterricht unterstützen*, muss immer wieder aufs Neue hinterfragt und ausgehandelt werden.

Solche Diskussionsprozesse vollziehen sich auf unterschiedlichen Ebenen. Auf der wissenschaftlichen Ebene werden aus fachdidaktischer Perspektive das Lehren und Lernen mit digitalen Werkzeugen intensiv beforscht; in der Aus- und Weiterbildung werden wichtige Impulse für die unterrichtspraktische Nutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht entwickelt, erprobt und kritisch diskutiert; in der Bildungsadministration werden unterrichtspraktische, fachliche und politische Entscheidungs- und Gestaltungsprozesse koordiniert; in der Schule schließlich werden digitale Werkzeuge von den Lehrerinnen und Lehrern sowie von den Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht genutzt und gleichzeitig auf ihren Gewinn für den persönlich erlebten Unterricht hinterfragt. Für solche Diskussionsprozesse über Mehrwert, Legitimation und fachdidaktisches Potential digitaler Werkzeuge braucht es einerseits

gelungene unterrichtspraktische Beispiele und andererseits engagierte Akteure, denen es gelingt, „auf jedem Parkett“ zu überzeugen und mit den Diskutanten aller Disziplinen gemeinsam im Gespräch zu bleiben. Denn bei allen Beteiligten darf man ein gemeinsames Interesse an der Weiterentwicklung eines zeitgemäßen und insbesondere guten Mathematikunterricht voraussetzen. Dieses gemeinsame Interesse ist die Grundlage, auf der zielführende Kommunikation gelingen kann. Umso wichtiger sind Akteure, denen eine solche Kommunikation gelingt.
Mit dem vorliegenden Band würdigen wir die Arbeit eines solchen Akteurs, nämlich das von Hans-Jürgen Elschenbroich, der seit vielen Jahren mit seinen unterrichtspraktischen Beispielen, mit seinen medienkritischen Beiträgen und seinem Eintreten für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht in der Gemengelage unterschiedlicher Interessen integrierend wirkt. Die Beiträge dieses Bandes reflektieren die Art der Debattenbeiträge, für die wir Hans-Jürgen Elschenbroich schätzen: So stehen etwa praxiserprobte Beispiele mathematischer Inhalte, die für den Einsatz digitaler Werkzeuge in reflektierter Weise aufbereitet wurden, neben fachdidaktischen Beiträgen, die die Rolle und die Potentiale digitaler Werkzeuge beforschen und weiterentwickeln. Es entsteht ein Bild dieses gemeinsamen Ringens Vieler um eine Antwort auf die Frage, welche Rolle digitale Werkzeuge beim Lehren und Lernen von Mathematik spielen, und mithin ein Buch, das für die Schule – für den Mathematikunterricht – geschrieben wurde.

1 Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht

Der Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht kann sehr unterschiedlichen Zielen folgen. Prominent ist etwa das Erkunden dynamisierter Visualisierungen mathematischer Zusammenhänge (vgl. Duval, 2006) und damit die Ausbildung substantieller Begriffsbildungen (vgl. Drijvers, 2002) oder eben auch das Modellieren komplexer Zusammenhänge (Kutzler, 2003 Kieran & Drijvers, 2006), was nicht zuletzt durch die Abgabe aufwändiger Rechenvorgänge an den Computer ermöglicht wird. Wir wissen aber: Der Einsatz des Werkzeugs ist nie Selbstzweck, sondern muss einen Mehrwert für den Lernprozess leisten. Digitale Werkzeuge finden sich daher mit diesen Zielsetzungen in den länderübergreifenden Bildungsstandards benannt, hier für die Allgemeine Hochschulreife:

„Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- *beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,*
- *durch Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,*
- *mit der Reduktion schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer Datenmengen,*
- *durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten."*

(KMK, 2012)

Das Potential des Einsatzes digitaler Werkzeuge ist vielerorts deutlich beschrieben, und trotzdem lässt sich in der Praxis häufig noch eine Diskrepanz zwischen curricularem Anspruch und unterrichtlicher Realität feststellen.

So vielfältig die didaktischen Zielsetzungen und Einsatzbereiche digitaler Werkzeuge sind, so unterschiedlich sind die Werkzeuge, die man vorfindet:

- Tabellenkalkulation (TK): Im Mathematikunterricht können Tabellenkalkulationen etwa für den Umgang mit Zahlenlisten genutzt werden, die bei der Erkundung funktionaler Zusammenhänge systematisch auf numerische Muster hin untersucht werden, sowie für die Visualisierung und Darstellung großer Datenmengen in Boxplots, Diagrammen und Funktionsgraphen bei funktionalen Abhängigkeiten.
- Dynamische Geometrie-Software (DGS): Im Mathematikunterricht kann DGS insbesondere für die dynamische Erkundung geometrischer Zusammenhänge eingesetzt werden.
- Funktionenplotter (FP): Funktionale Zusammenhänge bis hin zur Bestimmung von Nullstellen, Ableitungen und Integralen lassen sich mit Hilfe von Funktionenplottern visualisieren.
- Computeralgebrasysteme (CAS): Hier handelt es sich um mathematische Software, die das Berechnen auf Symbolebene erlaubt.

Die Software ist ohne Hardware nicht nutzbar. Viele der Programme lassen sich auf Computern oder Tablets installieren, einige Software wird auf eigens entwickelten „Handhelds“ genutzt, die als CAS- oder GTR-Handhelds die Palette der traditionellen wissenschaftlichen Taschenrechner um leistungsfähigere flexibel einsetzbare Geräte erweitert.

Häufig wird mathematische Software über sogenannte „Multirepräsentationssysteme“ genutzt, in denen die mathematischen Objekte wie Daten, Kurven und Funktionen in verschiedenen, untereinander verknüpften Repräsentationsformen dargestellt sind: Änderungen einer Repräsentation haben unmittelbar analoge Änderungen der anderen zur Folge.Sie zeigen sich so als echte heuristische Werkzeuge in der Auseinandersetzung mit den mathematischen Lerninhalten. Die Beiträge des vorliegenden Bandes verdeutlichen diese Bandbreite der im Mathematikunterricht genutzten Werkzeuge, indem sie die unterrichtspraktischen Beispiele anhand der unterschiedlichen Varianten konkretisieren.

2 Visualisierung und Dynamik – eine Annäherung an die Beiträge von Hans-Jürgen Elschenbroich

Hans-Jürgen Elschenbroich zeichnet sein Interesse an Technik, an neuen Medien und insbesondere an dynamischer Geometriesoftware aus. Oder sollte man dieses Interesse besser Leidenschaft nennen? Dies wird eindrucksvoll dokumentiert durch eine Fülle von wissenschaftlichen und praxisorientierten Publikationen. Und dennoch: Bei aller Faszination für die neuen technischen Möglichkeiten ist bei Hans-Jürgen Elschenbroich immer klar, worum es letzten Endes geht: die Mathematik. Sie wird nicht etwa als sekundäres Anwendungsfeld für neue technische Möglichkeiten verstanden, vielmehr dient die Technik dazu, mathematische Inhalte auf neue Weise zugänglich zu machen. Wir wollen im Folgenden einige wesentliche Stationen in seinem Schaffen nachzeichnen, die sich alle an den beiden wohl wichtigsten Merkmale digitaler Werkzeuge orientieren, nämlich der Visualisierung und der Dynamisierung von Mathematik.

Visuelles Beweisen

Der Einsatz von DGS im schulischen Mathematikunterricht, so hat Hans-Jürgen Elschenbroich früh erkannt, hat ein großes Potenzial für die För-

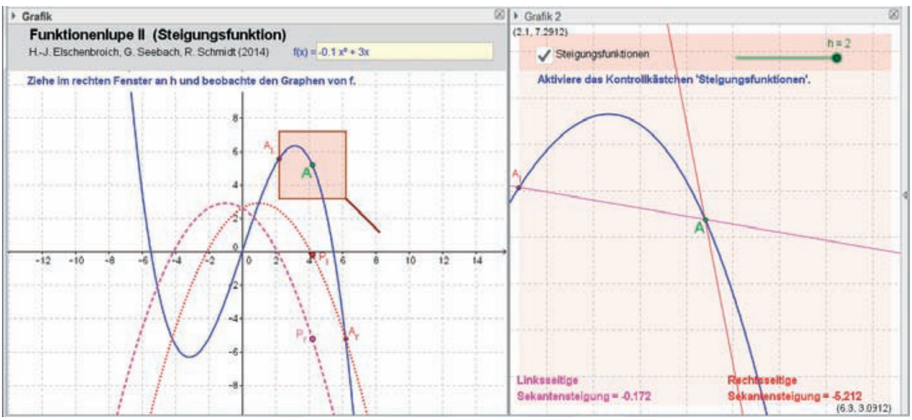
derung eines der ganz zentralen mathematischen Kompetenzen, nämlich dem Beweisen.
In einem seiner ersten Texte zur DGS warf er die Frage nach dem „Tod des Beweisens“ auf, doch er zeigte auch einen Ausweg, indem er die „Entwicklung einer neuen Beweiskultur“ (Elschenbroich 1997) forderte. Denn es war ihm schon damals klar, dass mit dem DGS auch eine neue Form des Beweises in die Klassenräume Einzug halten wird, die dort – viel mehr als ein klassischer Papier-und-Bleistift-Beweis – für eine verstehende Einsicht in mathematische Sachverhalte sorgen kann. Denn in der Schule kann der Beweis nicht wie in der Strukturmathematik das Ziel der systematischen Erkenntnissicherung haben: „Der Pythagoras“ steht seit Jahrtausenden in den Lehrbüchern und Papyrusrollen. Da dürfte die Forderung des Mathelehrers, dass auch in diesem Klassenraum seine Gültigkeit nachzuweisen sei, kaum das Beweisbedürfnis auch bei seinen Schülerinnen und Schülern wecken. Aus didaktischer Perspektive geht es beim Beweisen vielmehr um eine verständige Einsicht in den zu begründenden Sachverhalt. Das geschieht durch Vernetzung mit bekannten Sachverhalten im hermeneutischen Begründungsprozess: Welche anderen Begriffe und Sätze spielen für seinen Nachweis eine Rolle? Welches weitere Wissen können wir aus ihm folgern? Welche Spezialfälle sind interessant? Aus diesem Grund sollte es nicht nur ein fachliches, sondern auch ein didaktisches Interesse am mathematischen Argumentieren geben. Hierfür kann – so hat Elschenbroich deutlich gemacht – ein DGS eine Menge leisten.
In einem Vortrag vor der Jahrestagung der GDM in 1999 hat Hans-Jürgen Elschenbroich seine Auffassung, wie mittels DGS „Beweisen“ möglich ist, wie folgt begründet: Zentrales Ziel eines mathematischen Beweises ist die Einsicht in Allgemeingültigkeit des zu Beweisenden. Die Einsicht in Allgemeingültigkeit, so Elschenbroich, ist aber auch durch die „Erfahrung von Invarianz“ möglich, die in einer dynamisierten Konfiguration sichtbar werden kann. Für das Verstehen des Sachverhaltes kommt hinzu – und das ist nicht ganz so deutlich ausgeführt – dass die Bedingungen reflektiert sein müssen, unter denen eine Behauptung sich als gültig erweist. Indem aber der Beweisführende als Konstrukteur in der DGS alle Voraussetzungen der Behauptung berücksichtigt, wird er sich der Bedingungen bewusst. Denn vergisst er eine Voraussetzung, so fliegt ihm seine Konstruktion im Zugmodus auseinander. Im Zugmodus wird also nicht nur die Invariante unter den Repräsentanten der Konstruktionsvorschrift deutlich, sondern er ist gleichzeitig eine Kontrolle dafür, dass der Konstrukteur die

notwendigen Voraussetzungen der Behauptungen überhaupt berücksichtigt hat. Darin zeigt sich das DGS als ein mächtiges didaktisches Werkzeug, nicht zuerst für die systematische Erkenntnissicherung, sondern für eine verständige Einsicht in mathematische Sachverhalte.

Werkzeugkompetenzen

Obwohl im Verlauf der fachdidaktischen und unterrichtspraktischen Auseinandersetzung um den Einsatz digitaler Werkzeuge mittlerweile eine Vielzahl an Unterrichtsideen und -konzepten, an Forschungsergebnissen, Modellen und Theorien vorliegen, blieb bislang eine Frage unberührt: Es ist die Frage nach den Werkzeugkompetenzen. „Werkzeugkompetenz" meint mehr als die Kenntnis der rein technischen Bedienung des Geräts. Es geht bei diesem Begriff darum, mit *Werkzeugen kompetent Mathematik* zu treiben (Heintz, Elschenbroich et al., 2014). Diesem Verständnis liegt die Überzeugung zugrunde, dass die Technik nicht um ihrer selbst willen im Mathematikunterricht eingesetzt werden sollte, sondern dass sie als Instrumente dazu genutzt werden, die Mathematik in authentischer Weise zu erfahren. Zwei inhaltliche Aspekte zeichnet das Arbeiten mit digitalen Werkzeugen dabei in besonderer Weise aus: zum einen die systematische Variation und zum anderen die Möglichkeit der Visualisierung (Heintz, Elschenbroich, et al. 2015).

Am Beispiel der Funktionenlupe (Elschenbroich 2015a, 2015b) werden diese beiden wichtigen werkzeugbezogenen Aspekte verdeutlicht. Mit Hilfe digitaler Werkzeuge lässt sich dabei eine virtuelle Lupe nutzen, um einen gegebenen Funktionsgraphen genauer zu untersuchen.



Damit wird die ursprüngliche Idee des Funktionenmikroskops von Arnold Kirsch (1979) für digitale Werkzeuge umgesetzt und erweitert. Ziel der für den Unterricht nutzbaren Materialien ist dabei die Idee, mit Hilfe der digitalen Lupe ständig zwischen globaler und lokaler Betrachtung des funktionalen Zusammenhangs wechseln zu können. So lässt sich etwa die Ableitung als lineare Approximation erfahren: Die Erkenntnis, dass der Funktionsgraph (an differenzierbaren Stellen) bei hinreichendem Zoomfaktor als eine Gerade erscheint, gehört zu einer der zentralen Erkenntnisse der Analysis. Genau dies aber gelingt bei Unstetigkeits- oder „Knick"-Stellen nicht, egal wie groß der Zoomfaktor ist. Der Begriff der Differenzierbarkeit wird so auch interaktiv visuell zugänglich, und zwar indem die Definition der Ableitung als lineare Approximation gewissermaßen „enaktiviert" wurde. Die Funktionenlupe erweist sich so als echtes mathematisches Werkzeug. Die Werkzeugkompetenz erweist sich darin, dass der Lernende das Visualisierungspotential dieser dynamischen Lernumgebung zielorientiert durch eine systematische Variation auslotet und für seinen Lernprozess nutzt. Für den Unterricht benötigt es überzeugende, mathematisch substanzielle und unterrichtspraktische Beiträge, die solche Arten der Visualisierung und – damit verbunden – der systematischen Betrachtung der Lerninhalte ermöglichen und fördern und die die Diskussion um Werkzeugkompetenzen damit in konstruktiver Weise bereichern.

Elektronische Arbeitsblätter

Hans-Jürgen Elschenbroich hat – zusammen mit Günter Seebach – ein ihm eigenes Konzept von elektronischen Arbeitsblättern entwickelt. Die beiden Autoren haben eine Verbindung gefunden, die technischen Schwierigkeiten beim Einsatz der digitalen technischen Hilfsmittel außen vor zu halten und den didaktischen Schwerpunkt in den Mittelpunkt zu setzen. So soll der mathematische Inhalt im Zentrum stehen und die Vermittlung von technischen Fertigkeiten in den Hintergrund gedrängt werden. Es geht nicht um die Vermittlung von informatorischen Kenntnissen, sondern von mathematischen Kenntnissen. Das Konzept der elektronischen Arbeitsblätter wurde manchmal wegen seiner Engführung kritisiert und dennoch häufig kopiert. Visuelle Impulse, unterstützende Konstruktionen und detaillierte Aufgabenstellungen befähigen den Lernenden, mathematische Erkenntnisse zu formulieren, die ohne diese technischen Unterstützungssysteme nicht möglich wären. Eine eigens entwickelte und schnell vermittelbare Farbgebung, zum Beispiel ‚grün' für freie Objekte oder ‚rot' für die zu beobachtenden Objekte zieht sich durch alle Arbeitsblätter. Unterschiedliche Schwierigkeitsgrade und offene Aufgabenstellungen ermöglichen Differenzierung im Unterricht. Dabei wird immer Wert darauf gelegt, dass die Lernergebnisse gesichert und auch geübt werden. Lernende werden aufgefordert, ihre Erkenntnisse zu dokumentieren, zunehmend auch im elektronischen Raum der Lernumgebung.

Zug um Zug wurde bei der Entwicklung der elektronischen Arbeitsblätter der Aspekt des Übens weiter ausgebaut, wobei eine Orientierung an Winters Prinzip des intelligenten Übens angelegt wurde und sehr darauf geachtet wurde, dass im Winter'schen Sinne das „das Sehen mit dem Denken durchsetzt ist" (Winter, 1989). Dazu wurde auch weitere Software wie Mastertool sowie Kombinationen der Software entwickelt.

Begonnen haben die Autoren mit der Entwicklung der Arbeitsblätter für die Jahrgangsstufen 7/8, so konnte man die Lehrerinnen und Lehrer in ihrer Bedürfnislage abholen – nämlich dort, wo einerseits das Interesse der Lehrenden und die Dichte an administrativen Vorgaben durch Lernstanderhebungen oder Kernlehrpläne hoch ist und wo andererseits die mathematischen Themen par excellence für den Einsatz digitaler Werkzeuge liegen. Die Arbeitsblätter ‚Geometrie entdecken!' sind inzwischen für alle Jahrgangsstufen und verschiedene Schulformen der Sekundarstufe I erschienen und so angelegt, dass sie in Aufgabenstellung und Konstruktion verändert und angepasst werden können. Entsprechend der eingesetzten technischen Software passten sich die Autoren in den Jahren von 1996 bis heute den Interessen und Möglichkeiten der Schulwirklichkeit an. So wurden zunächst Arbeitsblätter für Euklid-DynaGeo, Geolog, Cabri Geomètre und schließlich auch für GeoGebra (Elschenbroich & Seebach 2011–2014) entwickelt.

In seinen Unterrichtsmaterialien weist Hans-Jürgen Elschenbroich immer wieder auf die Notwendigkeit hin, dass sich Lehrkräfte unermüdlich über ihre Erfahrungen mit dem Einsatz neuer Technologien austauschen und diese für die Adaption des Materials für ihre jeweiligen Lerngruppen nutzen: ‚Es gibt keinen Musterweg, es gibt nur Ihre Lösung und die Ihrer Schule!' und ‚Tun Sie sich zusammen, arbeiten Sie die Materialien um oder entwickeln Sie zusammen im Team neue Materialien!'

Auch in diesem Verständnis der Unterrichtsmaterialien als „Steinbruch“, als Anlass für den reflektierten, an der Praxis orientierten didaktischen Austausch, wird die Sorge Hans-Jürgen Elschenbroichs für das didaktische, das vermittelnde Gespräch deutlich. Hans-Jürgen Elschenbroich ist *Brückenbauer*, wie Rudolf von Hofe ihn im Festkolloquium am 30. Mai 2014 charakterisierte. Als ein solcher Brückenbauer ist er an vielen Schnittstellen in der mathematikdidaktischen Landschaft aktiv. Es ist ihm und uns zu wünschen, dass das noch lange so bleibt.

Literatur

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131.

Drijvers, P. (2002): Learning Mathematics in a Computer Algebra Environment: Obstacles are Opportunities. In: ZDM 34, S. 221–228

Elschenbroich, H.-J. (1997): Tod des Beweisens oder Entwicklung einer neuen Beweiskultur? In: MNU 50/8, S. 494–502

Elschenbroich, H.-J. (1999). Visuelles Beweisen – Neue Möglichkeiten durch Dynamische Geometriesoftware. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999.

Elschenbroich, H.-J. (2014): Ein intuitiver Zugang zum Flächensatz des Pappus. In: Der Mathematikunterricht 60/5. S. 34–41.

Elschenbroich, H.-J. (2015a): Die interaktive Funktionenlupe – Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015.

Elschenbroich, H.-J. (2015b): Anschauliche Differenzialrechnung mit der Funktionenlupe. In MNU Heft 5/2015.

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. 2011–2014: Geometrie entdecken!, Teil 1–3. co.Tec.

Heintz, Gaby/Elschenbroich, Hans-Jürgen/Laakmann, Heinz/Schacht, Florian/Schmidt, Reinhard (2014): Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht. In: Roth, J./Ames, J. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Münster. S. 507–511.

Heintz, Gaby/Elschenbroich, Hans-Jürgen/Laakmann, Heinz/Langlotz, Hubert/Poethke, Mario/Rüsing, Michael/Schacht, Florian/Schmidt, Reinhard/Schmidt, Ulla/Tietz, Carsten (erscheint 2016): Digitale Werkzeugkompetenzen von Klasse 5 bis zum Abitur.

Kirsch, Arnold (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3 (S. 25–41).

Kieran, Carolyn & Drijvers, Paul (2006): The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of cas use in secondary School algebra. In: International Journal of Computers for Mathematical Learning 11 (2), S. 205–263.

Kutzler, Bernhard (2003): CAS as Pedagogical Tools for Teaching and Learning Mathematics. In: James T. Fey, Al Cuoco, Carolyn Kieran, Lin McMullin und Rose Mary Zbiek (Hg.): Computer algebra systems in secondary school mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 53–72.

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (Zugriff am 25.08.2015) URL: *http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf*.

Winter, Heinrich (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Vieweg.